Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 4 de marzo de 2022.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Determinar, si existen, valores $a \in \mathbb{C}$ tales que

$$\int_{(|z|=1)^+} (z + az^3)\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0.$$

Estudiar el mismo problema si se cambia la circunferencia unitaria por cualquier otra curva cerrada y simple del plano complejo.

Ejercicio 2. Modelar el problema del potencial electrostático en la banda infinita $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0, x - 1 < y < x + 1\}$ si en la frontera toma el valor 1, salvo en su base donde es igual a 0. Dar las ecuaciones de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente.

Ejercicio 3. Dada $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x < 1/2 \\ -x+1 & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$, encontrar constantes reales a, b, c de modo que: $\displaystyle\int_0^1 |f(x) - a - b\,\operatorname{sen}(2\pi x) - c\,\operatorname{sen}(8\pi x)|^2\,dx$ sea mínimo y explicar por qué es el mínimo. Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ u(0, y) = u(1, y) = 0 & 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(x, 2) = \operatorname{sen}(4\pi x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\mathcal{F}[f](\omega) = \dfrac{4 - w^3}{(w^2+4)^8}$. Determinar a qué convergen cada una de las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\mathrm{t})\, f'\left((t-3)/2\right) e^{-i\omega t}\,dt,$ *ii)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-5|\tau|}\,d\tau \right) e^{-i\omega t} dt.$

Ejercicio 5. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua a trozos y de orden exponencial tal que

$$f(t) = 3t^2 - e^{-\alpha t} - \int_0^t f(\tau)\, e^{(t-\tau)} d\tau \quad \forall t \geqslant 0$$

Determinar, si existen, los valores de α para los que la abscisa de convergencia de la transformada de Laplace de f resulta igual a cero. Hallar f en el caso $\alpha = 1$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO III – SEGUNDO CUATRIMESTRE 2021
EXAMEN INTEGRADOR – CUARTA FECHA – 04/03/2022
RESOLUCIÓN ESQUEMÁTICA

1. Determinar, si existen, valores $a \in \mathbb{C}$ tales que $\oint_{|z|=1} (z + az^3)[sen(\frac{1}{z})]^2 dz = 0$. Estudiar el mismo problema si se cambia la circunferencia por cualquier otra curva cerrada del plano complejo. (Se consideran circuitos simples positivos)

Resolución: Cualquiera sea $a \in \mathbb{C}$, la función $f(z) = (z + az^3)[sen(\frac{1}{z})]^2$ tiene una única singularidad en $z = 0$. Por razones de dominio público, esta singularidad es aislada. Por lo tanto, $\oint_{|z|=1} (z + az^3)[sen(\frac{1}{z})]^2 dz = 2\pi i RES(f,0)$. Y ya que estamos, por la invariancia homotópica de las integrales de funciones holomorfas, para cualquier circuito simple positivo C del plano complejo <u>que no pase por 0</u>,

$$\oint_C (z + az^3)[sen(\tfrac{1}{z})]^2 dz = \begin{cases} 2\pi i RES(f,0) & si \quad 0 \in Ri(C) \\ 0 & si \quad 0 \notin Ri(C) \end{cases}$$

Por lo tanto, solo nos queda estudiar el residuo de f en 0 en función de a. A esta altura de los acontecimientos, usted ya debería saber que se trata de una singularidad esencial y no debería perder el tiempo probando límites de la forma $\underset{z \to 0}{Lim}\, z^k f(z)$ ... Comencemos por el desarrollo de Taylor de $[sen(w)]^2$ entorno de 0. Hay muchas maneras de hacerlo (calculando las derivadas sucesivas en 0, utilizando la forma exponencial de $sen(w)$, etc]. Nosotros utilizaremos el camino que nos parece más corto:

$$\frac{d}{dw}[sen(w)]^2 = 2sen(w)\cos(w) = sen(2w) = 2w - \tfrac{1}{3!}2^3 w^3 + \tfrac{1}{5!}2^5 w^5 - \tfrac{1}{7!}2^7 w^7 + \ldots$$

$$[sen(w)]^2 = cte + w^2 - \tfrac{2^3}{3!4} w^4 + \tfrac{2^5}{5!6} w^6 - \tfrac{2^7}{7!8} w^8 + \ldots = cte + w^2 - \tfrac{2^3}{4!} w^4 + \tfrac{2^5}{6!} w^6 - \tfrac{2^7}{8!} w^8 + \ldots$$

Evaluando en $w = 0$ se deduce que la constante es nula y por lo tanto:

$$[sen(w)]^2 = w^2 - \tfrac{2^3}{4!} w^4 + \tfrac{2^5}{6!} w^6 - \tfrac{2^7}{8!} w^8 + \ldots$$

Dado que se trata de una función entera, este desarrollo es válido para cualquier $w \in \mathbb{C}$. Entonces, para cualquier $z \in \mathbb{C} - \{0\}$:

$$[sen(\tfrac{1}{z})]^2 = z^{-2} - \tfrac{2^3}{4!} z^{-4} + \tfrac{2^5}{6!} z^{-6} - \tfrac{2^7}{8!} z^{-8} + \ldots$$

Ahora, dado que se trata de una serie absolutamente convergente, podemos hacer cómodamente las cuentas que faltan:

$$f(z) = (z + az^3)[sen(\tfrac{1}{z})]^2 =$$
$$= z\left(z^{-2} - \tfrac{2^3}{4!}z^{-4} + \tfrac{2^5}{6!}z^{-6} - \tfrac{2^7}{8!}z^{-8} + \ldots\right) + az^3\left(z^{-2} - \tfrac{2^3}{4!}z^{-4} + \tfrac{2^5}{6!}z^{-6} - \tfrac{2^7}{8!}z^{-8} + \ldots\right) =$$
$$= z^{-1} - \tfrac{2^3}{4!}z^{-3} + \tfrac{2^5}{6!}z^{-5} - \tfrac{2^7}{8!}z^{-7} + \ldots + az - a\tfrac{2^3}{4!}z^{-1} + a\tfrac{2^5}{6!}z^{-3} - a\tfrac{2^7}{8!}z^{-5} + \ldots$$

Ordenando la serie por potencias de z (en este paso necesitamos la convergencia absoluta):

$$f(z) = (z + az^3)[sen(\tfrac{1}{z})]^2 =$$
$$= az + \left(1 - \frac{2^3 a}{4!}\right)\frac{1}{z} + \left(-\frac{2^3}{4!} + \frac{2^5 a}{6!}\right)\frac{1}{z^3} + \left(\frac{2^5}{6!} - \frac{2^7 a}{8!}\right)\frac{1}{z^5} + \ldots.$$

Por lo tanto, el residuo de f en 0 es

$$RES(f,0) = 1 - \frac{2^3 a}{4!} = 1 - \frac{a}{3}$$

Por lo tanto, la respuesta es:

***Respuesta* 1**: El único valor de $a \in \mathbb{C}$ para el cual $\oint_{|z|=1} (z + az^3)[sen(\tfrac{1}{z})]^2 dz = 0$ es $a = 3$.

Para cualquier circuito simple positivo C del plano complejo <u>que no pase por 0</u>, si $0 \in Ri(C)$, entonces $\oint_C (z + az^3)[sen(\tfrac{1}{z})]^2 dz = 0$ sii $a = 3$ y $\oint_C (z + az^3)[sen(\tfrac{1}{z})]^2 dz = 0$ para cualquier valor de a si $0 \notin Ri(C)$.

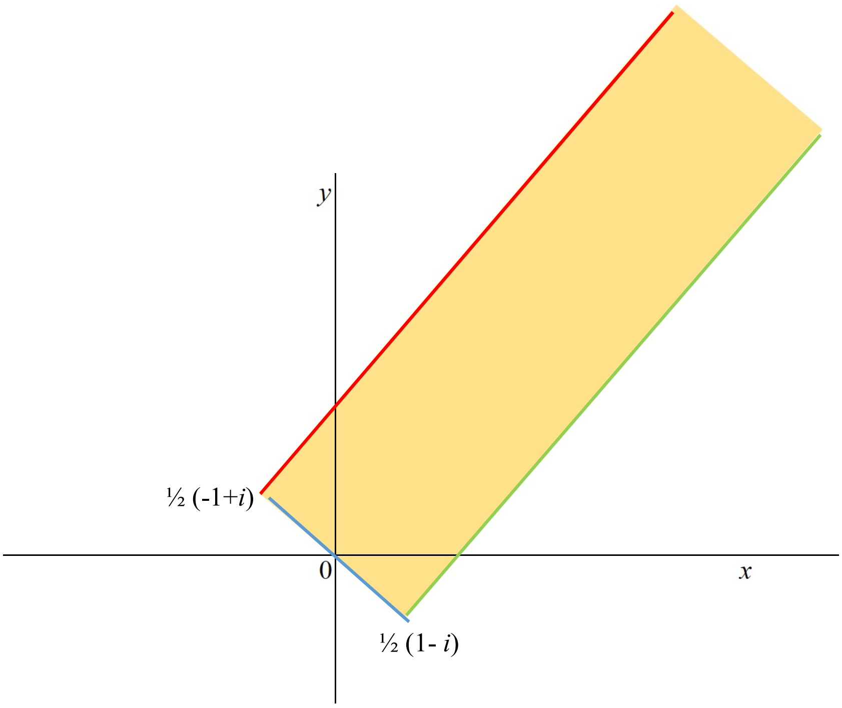
---

2. Modelar el problema del potencial electroestático en la banda infinita

$$\left\{ (x, y) \in \Re^2 : x + y > 0, x - 1 < y < x + 1 \right\}$$

si en la frontera toma el valor 1, salvo en la base donde es igual a 0. Dar ecuaciones de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente.

Resolución: Se trata del problema de Dirichlet esquematizado en el siguiente gráfico:



$\Delta u = 0$ en el interior de la banda
$u = 1$ en las semirrectas verde y roja
$u = 0$ en el segmento azul

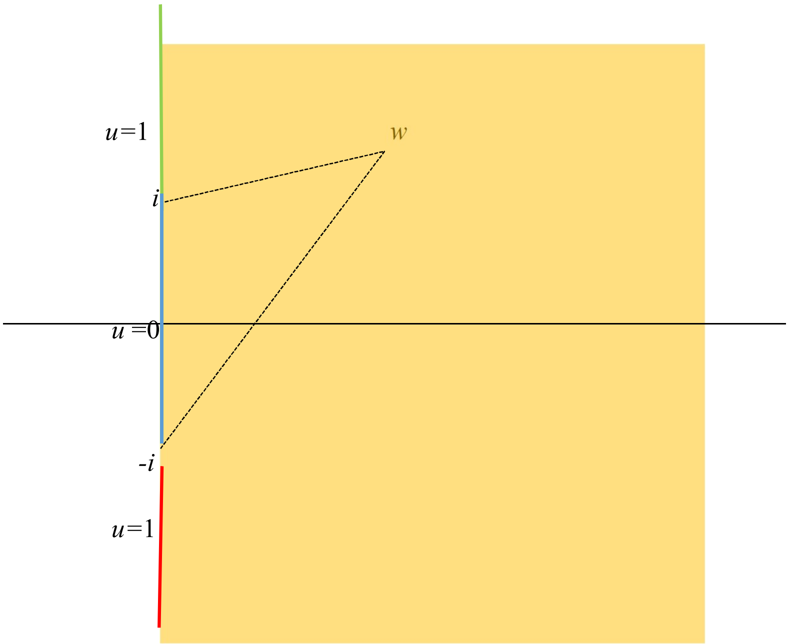
Para resolver este problema, donde las condiciones de contorno son seccionalmente constantes, podemos utilizar el método de las transformaciones conformes.

Primera transformación: $z \mapsto z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z$: rotación en sentido antihorario en torno del origen y en ángulo $\dfrac{\pi}{4}$. La banda gira en este sentido y en este ángulo en torno de 0 y queda ubicada verticalmente, apoyada en el segmento $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ de la recta real.

Segunda transformación: $z_1 \mapsto z_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} z_1$: dilatación de la banda, que queda en posición vertical pero ahora su base es el segmento $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (engordó un poquito….)

Tercera transformación: $z_2 \mapsto z_3 = sen(z_2)$: esta es la más violenta: extiende la banda en todo el semiplano superior (ver la figura siguiente, donde se ve una rotación de esta región y su frontera)

Cuarta transformación: $z_3 \mapsto w = -iz_3$: rotación en sentido anti-horario en torno del origen y en ángulo recto. Lo hacemos para trabajar más cómodamente con los argumentos. El resultado es el siguiente:



$$w = -iz_3 = -isen(z_2) = -isen\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} z_1\right) = -isen\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)z\right) = -isen\left(\frac{\pi}{2}(1+i)z\right)$$

Ahora, buscamos u en la forma $u = A\arg(w-i) + B\arg(w+i) + C$ y determinamos las constantes de manera que se verifiquen las condiciones de contorno:

(1) semirrecta verde: $A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 1$

(2) segmento azul: $-A\frac{\pi}{2} + B\frac{\pi}{2} + C = 0$

(3) semirrecta roja: $-A\frac{\pi}{2} - B\frac{\pi}{2} + C = 1$

Resolviendo (sumar y restar ecuaciones ayuda….) resultan $A = \frac{1}{\pi}$, $B = -\frac{1}{\pi}$ y $C = 1$. Finalmente, entonces:

$$u = \frac{1}{\pi}\arg(w-i) - \frac{1}{\pi}\arg(w+i) + 1 = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w-i)}{\operatorname{Re}(w-i)}\right) - \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w+i)}{\operatorname{Re}(w+i)}\right) + 1$$

donde $w = -isen\left(\frac{\pi}{2}(1+i)z\right)$

(por favor, no confundir argumentos con arcotangentes….) Observemos que aquí podemos utilizar la función arcotangente pues los argumentos de *w-i* y de *w+i* varían entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Se puede completar la cuenta para obtener la forma explícita de *u* como función de *x* e *y*, es decir: de la parte real y de la parte imaginaria de *z* (no terminamos las cuentas aquí). Una conjugada armónica de *u* es

$$v = \frac{1}{\pi}\ln|w-i| - \frac{1}{\pi}\ln|w+i| + 1$$

pues la función $f(z) = \frac{1}{\pi}Log(w-1) - \frac{1}{\pi}Log(w+i) + 1$ (*w* es función holomorfa de *z*) es holomorfa en la región utilizada. Entonces, las ecuaciones de las líneas equipotenciales son *u* = cte y las ecuaciones de las líneas de corriente (= trayectorias ortogonales a las equipotenciales) son *v* = cte.

---

3. SUITE: Dada $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -x+1 & si \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$, encontrar constantes reales *a*, *b* y *c* de modo que $\int_0^1 |f(x) - a - bsen(2\pi x) - csen(8\pi x)|^2 dx$ sea mínimo y explicar por qué es el mínimo valor. Resolver:

$$\begin{cases} (i)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < 2 \\ (ii)\ u(0,y) = u(1,y) = 0 & 0 \le y \le 2 \\ (iii)\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le 1 \\ (iv)\ u(x,2) = sen(4\pi x) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Resolución: En el espacio de las funciones reales seccionalmente continuas en el intervalo [0,1] tenemos el producto interno $< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ (atención: en realidad se trata de un "casi"-producto interno, pues verifica todas las propiedades de los productos internos excepto la implicación $< f, f > = 0 \Rightarrow f = 0$; lo que sí es cierto es que si $<f, f> = 0$, entonces f es nula en todo el intervalo $[0,1]$ excepto a lo sumo una cantidad finita (o nula) de puntos de dicho intervalo, es decir: f es "casi nula"). La expresión integral $\int_0^1 |f(x) - a - bsen(2\pi x) - csen(8\pi x)|^2 dx$ es el cuadrado de la distancia entre f y un elemento $a\alpha + b\beta + c\gamma$ del subespacio generado por las funciones $\alpha(x) = 1$ (constante), $\beta(x) = sen(2\pi x)$ y $\gamma(x) = sen(8\pi x)$. Entonces, como sabemos desde Álgebra II, el elemento más próximo a f en este subespacio es la proyección ortogonal de f a dicho subespacio. Por otra parte, estas tres funciones son ortogonales. Comprobemos esto y aprovechemos a calcular sus normas:

$$\int_0^1 \alpha(x)^2 dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$< \alpha, \beta > = \int_0^1 \alpha(x)\beta(x)dx = \int_0^1 sen(2\pi x)dx = -\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + \tfrac{1}{2\pi}\cos(0) = 0$$

$$< \alpha, \gamma > = \int_0^1 \alpha(x)\gamma(x)dx = \int_0^1 sen(2\pi x)dx = -\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + \tfrac{1}{2\pi}\cos(0) = 0$$

$$\int_0^1 \beta(x)^2 dx = \int_0^1 sen(2\pi x)^2 dx = \tfrac{1}{2}[x - \tfrac{1}{2\pi} sen(2\pi x)\cos(2\pi x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$< \beta, \gamma > = \int_0^1 \beta(x)\gamma(x)dx = \int_0^1 sen(2\pi x)sen(8\pi x)dx = \tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{6\pi} sen(6\pi x) + \tfrac{1}{10\pi} sen(10\pi x)]_{x=0}^{x=1} = 0$$

$$\int_0^\pi \gamma(x)^2 dx = \int_0^1 sen(8\pi x)^2 dx = \tfrac{1}{2}[x - \tfrac{1}{8\pi} sen(8\pi x)\cos(8\pi x)]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}$$

Entonces, la proyección ortogonal de f sobre el subespacio generado por estas tres funciones es

$$\Pi(f) = \frac{< f, \alpha >}{\|\alpha\|^2}\alpha + \frac{< f, \beta >}{\|\beta\|^2}\beta + \frac{< f, \gamma >}{\|\gamma\|^2}\gamma$$

y los coeficientes buscados son:

$$a = \frac{< f, \alpha >}{\|\alpha\|^2} = \int_0^1 f(x)dx \quad ,$$

$$b = \frac{< f, \beta >}{\|\beta\|^2} = 2\int_0^1 f(x) sen(2\pi x) dx \quad \text{y}$$

$$c = \frac{< f, \gamma >}{\|\gamma\|^2} = 2\int_0^1 f(x) sen(8\pi x) dx$$

Dejamos las cuentitas “a cargo del lector”. Todo esto está explicado con más entusiasmo que eficiencia en los apuntes sobre Series de Fourier que están a disposición de todo el alumnado en la página de la materia.

Ahora, para resolver el problema planteado podemos simplificar las condiciones de contorno (sin alterar la ecuación) mediante la función

$$v(x, y) = u(x, y) - \frac{sen(4\pi x)\cosh(2\pi y)}{\cosh(4\pi)} \tag{5}$$

Esta función es armónica sii lo es u (pues el segundo término del segundo miembro es una función armónica) y el problema queda, en términos de v:

$$\begin{cases} (i)\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0 & 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < 2 \\ (ii)\ v(0, y) = v(1, y) = 0 & 0 \le y \le 2 \\ (iii)\ v(x,0) = f(x) - \dfrac{sen(4\pi x)}{\cosh(4\pi)} & 0 \le x \le 1 \\ (iv)\ v(x,2) = 0 & 0 \le x \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

Mediante separación de variables y tomando en cuenta las condiciones lineales de contorno (es decir: (*ii*) y (*iii*)) obtenemos

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen(n\pi x)[e^{n\pi y} e^{-2n\pi} - e^{-n\pi y} e^{2n\pi}] = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{2c_n}^{c'_n} sen(n\pi x) senh[n\pi(y-2)] \tag{7}$$

La condición (*iii*) es, ahora:

$$v(x,0) = f(x) - \frac{sen(4\pi x)}{\cosh(4\pi)}$$

Todo lo que sigue es clásico y popular: considerando la extensión $2-$periódica impar $\widetilde{g}(x)$ de la función $g(x)=f(x)-\dfrac{sen(4\pi x)}{\cosh(4\pi)}$, calculamos

$$c'_n\, senh(-2n\pi)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\widetilde{g}(x)sen(nx)dx=\int_{0}^{1}g(x)sen(nx)dx$$

y resulta entonces: $c'_n=-\dfrac{1}{senh(2n\pi)}\displaystyle\int_0^1 g(x)sen(nx)dx$.

---

4. Sea $f:\Re\longrightarrow\Re$ con $\hat{f}(\omega)=\dfrac{4-\omega^3}{(\omega^2+4)^8}$. Determinar a qué convergen cada una de las siguientes integrales:

$$(i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(t)f'\left(\frac{t-3}{2}\right)e^{-i\omega t}dt \qquad , \qquad (ii)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau-t)e^{-5|\tau|}d\tau\right)e^{-i\omega t}dt$$

Resolución: No se pretende que el alumno demuestre que f y f' son absolutamente integrables utilizando (por ejemplo) su transformada de Fourier y el teorema de inversión:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4-\omega^3}{(\omega^2+4)^8}e^{i\omega x}dx$$

Pero, por lo menos, podría mencionar que estas propiedades son necesarias para legitimar los siguientes cálculos:

$$(i)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos(t)f'\left(\frac{t-3}{2}\right)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}f'\left(\frac{t-3}{2}\right)e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f'\left(\frac{t-3}{2}\right)e^{-it(\omega-1)}dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f'\left(\frac{t-3}{2}\right)e^{-it(\omega+1)}dt=$$

[cambio de variable: $x=\dfrac{t-3}{2}$, $t=2x+3$]

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-i(\omega-1)(2x+3)}2dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)e^{-i(\omega+1)(2x+3)}2dx=$$

$$= e^{-3i(\omega-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,'(x) e^{-2i(\omega-1)x} dx + e^{-3i(\omega+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,'(x) e^{-2i(\omega+1)x)} dx =$$

[propiedad: $\Im(f\,')(\omega) = i\omega\Im(f)(\omega)$ para todo $\omega \in \Re$: ver condiciones de aplicación]

$$= e^{-3i(\omega-1)} i2(\omega-1)\hat{f}[2(\omega-1)] - e^{-3i(\omega+1)} i2(\omega+1)\hat{f}[2(\omega+1)] =$$

$$= e^{-i3(\omega-1)} i2(\omega-1)\frac{4-4(\omega-1)^2}{[4(\omega-1)^2+4]^8} - e^{-i3(\omega+1)} i2(\omega+1)\frac{4-4(\omega+1)^2}{[4(\omega+1)^2+4]^8}$$

(*ii*) La función $\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t) e^{-5|\tau|} d\tau\right) e^{-i\omega t} dt$ es la transformada de Fourier de la convolución $f * g$, donde $g(t) = e^{-5|t|}$. Sobre la convergencia de la integral y las propiedades de la convolución puede consultarse, por ejemplo, el apunte sobre Transformación de Fourier a disposición en la página de la materia, y/o cualquiera de los textos recomendados en la bibliografía de la misma página. En el mencionado apunte se presenta como ejemplo la transformada de Fourier de la función $t \mapsto e^{-|t|}$, que es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-i\omega x} dx = \frac{2}{1+\omega^2}$$

Mediante el cambio de variable de integración $x = 5t$, se tiene $5\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5|t|} e^{-i\omega 5t} dt = \frac{2}{1+\omega^2}$;

ahora, para $\alpha = 5\omega$: $5\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5|t|} e^{-i\alpha t} dt = \frac{2}{1+\left(\frac{\alpha}{5}\right)^2}$ y por lo tanto la tranformada de Fourier de g es $\hat{g}(\omega) = \frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{\omega^2}{25}} = \frac{10}{25+\omega^2}$. Finalmente, entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau - t) e^{-5|\tau|} d\tau\right) e^{-i\omega t} dt = (\widehat{f * g})(\omega) \overset{(1)}{=} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) = \frac{10(4-\omega^3)}{(\omega^2+4)^8(25+\omega^2)}$$

(1) El miembro izquierdo es la transformada de Fourier de $f * g$ y la igualdad está garantizada por el Teorema de Convolución.

---

5. Sea $f:[0,+\infty)\longrightarrow\Re$ continua a trozos y de orden exponencial tal que para todo $t\geq 0$

$$f(t)=3t^2-e^{-\alpha t}-\int_0^t f(\tau)e^{(t-\tau)}d\tau\ .$$

Determinar, si existen, los valores de α para los que la abscisa de convergencia de la transformada de Laplace de f resulta igual a cero. Hallar f en el caso $\alpha = 1$.

Resolución: Obsérvese que por ser f una función que toma valores reales, α es necesariamente real. Ahora, la función $h(t)=H(t)\int_0^t f(\tau)e^{(t-\tau)}d\tau$ es la convolución de f con la exponencial (multiplicada por la función de Heaviside). Por lo tanto, aplicando la transformación de Laplace a la ecuación del enunciado:

$$F(s)=3\frac{2!}{s^3}-\frac{1}{s+\alpha}-F(s)\frac{1}{s-1}$$

(F es la transformada de Laplace de f), donde necesariamente es $\operatorname{Re}(s+\alpha)>0$ y $\operatorname{Re}(s-1)>0$, es decir: $\operatorname{Re}(s)>-\alpha$ y $\operatorname{Re}(s)>1$. Por lo tanto, la abscisa de convergencia no puede ser 0 para ningún α .

Para $\alpha=1$, tenemos, para $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$F(s)\left(1+\frac{1}{s-1}\right)=\frac{6}{s^3}-\frac{1}{s+1}\ .$$

Haciendo cuentas, resulta

$$F(s)=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s(s+1)}=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}=\frac{6}{s^3}-\frac{6}{s^4}+\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}$$

Por lo tanto tenemos que para todo $t\geq 0$:

$$f(t)=3t^2-t^3+1-2e^{-t}$$
